HİPOTEZ TESTLERİ

Hipotezler genel olarak kitle parametreleri hakkında ortaya atılan iddialardır. Bu iddiaların doğruluğu önceden bilinmez.

Parametrelerin değerleri hakkında ortaya atılan iddiaların doğru olup olmadığı, örneklemden elde edilen bilgilere bağlı olarak belirli bir hata payı ile belirlenmeye çalışılır. Bu işleme hipotez testi denir.

Hipotez testleri için temel varsayımlar aşağıdaki gibidir:

- Örneğe alınan birimler birbirlerinden bağımsız olarak seçilmiş olmalıdırlar.
- Anakütle normal dağılıma sahip olmalıdır.

Hipotez testinin aşamaları,

- Hipotezlerin oluşturulması
- Anlamlılık düzeyinin (α) belirlenmesi
- Örnekleme dağılımının belirlenmesi
- Uygun test istatistiğin belirlenmesi
- Karşılaştırmalar yapılıp sonucun elde edilmesi ve yorumlanması

olarak verilebilir.

Kitle parametresi veya kitlelerin parametreleri hakkında ortaya atılan iddialar "**Araştırma hipotezi, alternatif hipotez yada karşıt hipotez**" olarak adlandırılır ve $\mathbf{H_1}$ ile gösterilir.

Örneğin,

$\mathbf{H_1}$: Ankara'daki üniversitelerde okuyan öğrencilerin okula gidiş dönüşte harcadıkları ortalama süre 80 dakikadan fazladır.

Bu hipotez,

$$\mathbf{H_1} : \ \boldsymbol{\mu} > \mathbf{80}$$

olarak da ifade edilebilir.

Araştırma hipotezinin (H_1) doğru olup olmadığını ortaya çıkarmak için, test edilecek olan yeni bir hipotez kurulur. Bu hipotez $\mathbf{H_0}$ ile gösterilir ve "**Yokluk hipotezi, sıfır hipotezi yada boş hipotez**" olarak adlandırılır.

H_0 hipotezi, kitle parametresinin belli bir değere eşit olduğu durumu belirtir. Yukarıda verilen araştırma hipotezi için,

$$\mathbf{H_0} : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{80}$$

biçimindedir.

Test edilen hipotez, H_0 hipotezidir.

H_0 hipotezi," = "durumunu içermelidir.

H_1 hipotezi," $\neq, <, >$ " durumlarından birini içermelidir.

H_0 ve H_1 hipotezleri ile ilgili olarak aşağıdaki örnekler verilebilir.

" **Tatil amacı ile ülkemize gelen yabancıların ortalama kalış süreleri 20 günden farklıdır** "

$$\mathbf{H_0} : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{20}$$

$$\mathbf{H_1} : \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{20}$$

" Kamu kesiminde çalışan ücretlilerin gelirlerine ilişkin varyans 100 den küçüktür "

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = 100$$

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < 100$$

" Anadolu lisesini bitiren öğrencilerin üniversiteyi kazanma oranı, meslek lisesini bitiren öğrencilerden daha büyüktür "

$$\mathbf{H_0} : \boldsymbol{\pi_A} = \boldsymbol{\pi_M}$$

$$\mathbf{H_1} : \boldsymbol{\pi_A} > \boldsymbol{\pi_M}$$

veya

$$\mathbf{H_0} : \boldsymbol{\pi_A} - \boldsymbol{\pi_M} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H_1} : \boldsymbol{\pi_A} - \boldsymbol{\pi_M} > \mathbf{0}$$

“ İstanbul’da yaşayan iki çocuklu ailelerin aylık ortalama mutfak harcaması, Samsun’da yaşayan iki çocuklu ailelerin aylık ortalama mutfak harcamasından farklıdır “

H_0 : (yazınız)

H_1 : (yazınız)

Birinci ve İkinci Tip Hatalar

Bir hipotez testi sonucunda,.

I. H_0 gerçekte doğrudur ve reddedilmemiştir (kabul edilmiştir).
II. H_0 gerçekte doğrudur, fakat reddedilmiştir (kabul edilmemiştir).
III. H_0 gerçekte yanlıştır, fakat reddedilmemiştir (kabul edilmiştir).
IV. H_0 gerçekte yanlıştır ve reddedilmiştir (kabul edilmemiştir).

H_0 Hipotezi		GERÇEKTE	
		Doğru	**Yanlış**
TEST SONUCU	**Red**	I. Tip hata (α)	$1-\beta$ Doğru karar
	Kabul	$1-\alpha$ Doğru karar	II. Tip hata (β)

I. Tip hata (α) : Testin anlamlılık düzeyi olarak da bilinir. Gerçekte doğru olan H_0 hipotezini red etme olasılığıdır.

II. Tip hata (β) : Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini kabul etme olasılığıdır.

Güvenilirlik düzeyi ($1-\alpha$) : Gerçekte doğru olan H_0 hipotezini kabul etme olasılığıdır.

Testin gücü ($1-\beta$) : Gerçekte yanlış olan H_0 hipotezini red etme olasılığıdır.

Testin gücünün yüksek olması istenen bir durumdur. Testin gücü ancak $\mathrm{H_0}$ hipotezini red edildiğinde hesaplanabilir.

I. Tip hata, araştırmacı tarafından önceden tespit edilmektedir. Dolayısıyla bunu azaltmak mümkündür. Genellikle $\boldsymbol{\alpha = 0.05\,, 0.01\; yada\; 0.10}$ alınmaktadır.

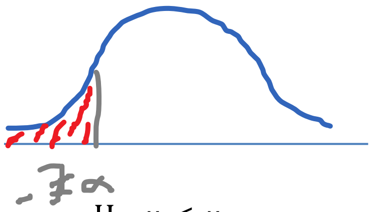
Tek yönlü ve çift yönlü testler

Araştırma hipotezinin kuruluş biçimine göre testler tek yönlü ve çift yönlü olarak adlandırılır

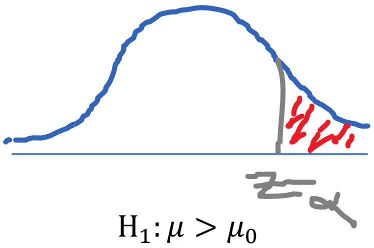
$\mathrm{H_1}$ hipotezi " $<$ " yada " $>$ " şeklinde ise tek yönlü test, " $\neq$ " şeklinde ise çift yönlü test yapılır.

$\alpha = 0.05$ olması durumunda, z tablosuna göre tek ve çift yönlü testlerde red ve kabul bölgeleri aşağıdaki gibidir.

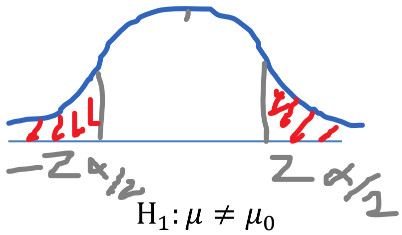
$\mathrm{H_0}: \mu = \mu_0$



$\mathrm{H_1}: \mu < \mu_0$



$\mathrm{H_1}: \mu > \mu_0$



$\mathrm{H_1}: \mu \neq \mu_0$

Bir ortalamaya ilişkin hipotez testi

Ortalamaya ilişkin hipotez testi yapılırken aşağıdaki adımlar izlenir:

1) Hipotezler kurulur

$$\mathrm{H}_0: \mu = \mu_0$$

$$\mathrm{H}_1: \mu\ (<, >, \neq) \mu_0$$

2) z tablo değeri bulunur.

H_1 hipotezi; tek yönlü ise $\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_\alpha$, çift yönlü ise $\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_{\alpha/2}$ alınır.

3) Test istatistiği hesaplanır.

$$\mathrm{z}_{hesap} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \quad , \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

4) Karar verilir.

$$|\mathrm{z}_{hesap}| > \mathrm{z}_\alpha \quad ise\ \ H_0\ hipotezi\ RED\ edilir.$$

$$|\mathrm{z}_{hesap}| \leq \mathrm{z}_\alpha \quad ise\ \ H_0\ hipotezi\ KABUL\ edilir.$$

Örnek. Samsun ili büyükşehir belediyesi sınırları içinde ikamet eden 4 kişilik ailelerin aylık ortalama mutfak harcamalarının 400 TL'den fazla olduğu iddia edilmektedir. Rasgele seçilen 9 tane 4 kişilik ailenin aylık mutfak harcamaları 480, 600, 380, 700, 290, 200, 800, 490, 560 olarak tespit edilmiştir. Kitle varyansı 900 ise %5 anlamlılık düzeyinde iddianın geçerli olup olmadığını (doğru olup olmadığını) belirleyiniz.

Çözüm: $\sigma^2 = 900$, $\alpha = 0.05$ verilmiş. Kitle varyansı bilindiği için z testi kullanılır.

$$\mathrm{H}_0: \mu = 400$$

$$\mathrm{H}_1: \mu > 400$$

$$\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_\alpha = \mathrm{z}_{0.05} = 1.64$$

$\bar{x} = 500\ \ bulunur.\ \ \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{900}{9}} = 10$ olup

$$\mathrm{z}_{hesap} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{500 - 400}{10} = 10$$

$$|\mathrm{z}_{hesap}| = 10 > \mathrm{z}_\alpha = 1.64 \quad olduğundan\ \ H_0\ hipotezi\ RED\ edilir.$$

Örnek. Belli bir hastalığın tedavisi için yeni ilaç geliştirilmiştir. Bu ilaçla tedavi edilen hastaların ortalama iyileşme süresinin 10 günden az olduğu iddia edilmektedir. Rasgele seçilen 7 hasta bu ilaçla tedavi edilmiş ve iyileşme süreleri 2, 4, 11, 3, 4, 6, 8 gün olarak belirlenmiştir. $\sigma^2 = 4\,,\ \ \alpha = 0.01$ ise kararımız ne olur?

Çözüm:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 10$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu < 10$$

$$\mathrm{z}_\alpha = \mathrm{z}_{0.01} = -2{,}33$$

$\bar{x} = 5.4285\ \ bulunur.\ \ \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = 0.756$ olup

$$\mathrm{z}_{hesap} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{5.4285 - 10}{0.756} = -6.047$$

$$\left|\mathrm{z}_{hesap}\right| = 6.047 > \mathrm{z}_\alpha = -2.33\ \ \ olduğundan\ \ H_0\ hipotezi\ RED\ edilir.$$

Bir orana ilişkin hipotez testi

Hipotez testinde aşağıdaki adımlar izlenir:

1) Hipotezler kurulur

$$\mathrm{H}_0: \pi = \pi_0$$

$$\mathrm{H}_1: \pi\ (<, >, \neq) \pi_0$$

2) z tablo değeri bulunur.

H_1 hipotezi; tek yönlü ise $\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_\alpha$, çift yönlü ise $\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_{\alpha/2}$ alınır.

3) Test istatistiği hesaplanır.

$$\mathrm{z}_{hesap} = \frac{p - \pi_0}{\sigma_p} \quad , \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$$

4) Karar verilir.

$$|\mathrm{z}_{hesap}| > \mathrm{z}_\alpha \quad ise\ \ H_0\ hipotezi\ RED\ edilir.$$

$$|\mathrm{z}_{hesap}| \leq \mathrm{z}_\alpha \quad ise\ \ H_0\ hipotezi\ KABUL\ edilir.$$

Örnek. X üniversitesi öğrencilerinin%30'dan fazlasının kütüphaneden faydalanma alışkanlığının olduğu iddia edilmektedir. Tesadüfü olarak belirlenen 100 öğrenciden 40'ının kütüphaneden faydalanma alışkanlığına sahip olduğu anlaşılmıştır. %5 anlamlılık düzeyinde iddia hakkında ne söylenebilir?

Çözüm:

$$\mathrm{H}_0: \pi = 0.30$$

$$\mathrm{H}_1: \pi > 0.30$$

$\mathrm{z}_\alpha = \mathrm{z}_{0.05} = 1.64$

$p = \frac{40}{100} = 0.40\ \ bulunur.\ \ \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.30(1-0.30)}{100}} = 0.0458$ olup

$$\mathrm{z}_{hesap} = \frac{0.40 - 0.30}{0.0458} = 2.18$$

$$|\mathrm{z}_{hesap}| = 2.18 > \mathrm{z}_\alpha = 1.64 \quad olduğundan\ \ H_0\ hipotezi\ RED\ edilir.$$

İki ortalama farkına ilişkin hipotez testleri (İki bağımsız grup)

Hipotez testinde aşağıdaki adımlar izlenir:

1) Hipotezler kurulur.

$$\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad [\ \mu_1 - \mu_2 = 0\ ]$$

$$\mathrm{H}_1: \mu_1 (<, >, \neq) \mu_2 \qquad [\ \mu_1 - \mu_2 (<, >, \neq) 0\ ]$$

2) z tablo değeri bulunur.

H_1 hipotezi; tek yönlü ise $\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_{\alpha}$

çift yönlü ise $\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_{\alpha/2}$ alınır.

3) Test istatistiği hesaplanır.

$$\mathrm{z}_{hesap} = \frac{(x_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{x_1 - x_2}} \quad , \quad \sigma_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

4) Karar verilir.

$$|\mathrm{z}_{hesap}| > \mathrm{z}_{\alpha} \quad ise\ \ H_0\ hipotezi\ RED\ edilir.$$

$$|\mathrm{z}_{hesap}| \leq \mathrm{z}_{\alpha} \quad ise\ \ H_0\ hipotezi\ KABUL\ edilir.$$

Örnek. Yabancı dil eğitimi yapan iki kurumdan birincisinin etkinliğinin daha az olduğu iddia edilmektedir. Her iki kurumdan mezun olanlardan rasgele 7'şer kişi seçilerek yabancı dil bilgisini ölçmeye yönelik bir test uygulanmıştır. Değerlendirme sonucundaki puanlar aşağıdaki gibidir.

I. kurum mezunlarının puanları : 65, 40, 70, 40, 50, 45, 40

II. kurum mezunlarının puanları: 64, 58, 45, 90, 72, 50, 76

Kurumların başarı puanlarına ilişkin varyanslar sırasıyla 100 ve 81 olduğuna göre %5 anlamlılık düzeyinde kararımız ne olur?

Çözüm. Gruplar birbirinden bağımsızdır.

$\mathrm{n}_1 = 7$, $\mathrm{n}_2 = 7$, $\sigma_1^2 = 100$, $\sigma_2^2 = 81$ verilmiş.

Hipotezler:

$$\mathrm{H}_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad [\ \mu_1 - \mu_2 = 0\ ]$$

$$\mathrm{H}_1: \mu_1 < \mu_2 \qquad [\ \mu_1 - \mu_2 < 0\ ]$$

***z* tablo değeri:**

H_1 hipotezi; tek yönlü olduğundan. $\mathrm{z}_{tablo} = \mathrm{z}_\alpha = \mathrm{z}_{0.05} = -1.64$

Test istatistiği:

$$\mathrm{z}_{hesap} = \frac{(x_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{x_1 - x_2}} \quad , \quad \sigma_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{350}{7} = 50$$

$$\bar{x}_2 = \frac{455}{7} = 65$$

$$\sigma_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{100}{7} + \frac{81}{7}} = 5.08$$

olup $\mathrm{z}_{hesap} = \frac{(x_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{x_1 - x_2}} = \frac{(50 - 65) - (\mu_1 - \mu_2)}{5.08} = \frac{(50 - 65) - 0}{5.08} = \frac{-15}{5.08} = -2.95$

Karar:

$$|\mathrm{z}_{hesap}| = 2.95 > \mathrm{z}_\alpha = -1.64 \quad olduğundan\ \ H_0\ hipotezi\ RED\ edilir.$$

(I. kurumun etkinliğinin II. Kurumdan daha az olduğu söylenebilir.)

Ödev:

$$n_1 = 25 \quad , \quad n_2 = 30 \quad , \quad \sigma_1^2 = 56 \quad , \quad \sigma_2^2 = 65 \quad , \quad \bar{x}_1 = 92 \quad , \quad \bar{x}_2 = 88$$

değerleri verilmiştir.

Anakütle ortalamalarının farklı olup olmadığını %5 anlamlılık düzeyinde test ediniz.